2.8 اختبار الفرضيات التي تتعلق بمتوسطي مجتمعين مستقلين

Test the hypotheses concerning of two means

نهتم في كثير من الحالات في الحياة العملية بدراسة ظاهرة في مجتمعين مختلفين. وقد لايكون هذا الاهتمام منصب على القيم الحقيقية لمتوسطي الظاهرة في المجتمعين وانما يكون الاهتمام على كون هذه المتوسطات منطقية وهناك علاقة بينها. ويستخدم هذا الاختبار في حالة كون تبايني المجتمعين $(\sigma_1^2; \sigma_2^2)$ معلومين او غير معلومين وحجم العينتين $(n_1; n_2)$ قد يكونا كبيرين او صغيرين. ولتوضيح كيفية تطبيق اختبار الفرضيات حول الفرق بين المتوسطين نفرض انه لدينا $(X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2))$ يمثل الظاهرة في المجتمع الاول وسحبت منه عينة حجمها (n_1) وكان الوسط الحسابي لمشاهداتها هو $(\bar{x}_1)$ وكان

$(X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2))$ نفس الظاهرة في المجتمع الثاني وسحبت منه عينة مستقلة عن الاولى وبحجم (n_2) وكان الوسط الحسابي لمشاهداتها هو $(\bar{x}_2)$. فان اختبار الفرضية المتعلقة بمتوسطي مجتمعين مستقلين يقصد به اختبار مدى وجود فرق حقيقي بين المتوسطين نتيجة معالجتين مختلفتين او مقارنة هذا الفرق مع قيمة يحددها الباحث. تعتمد هذه الاختبارات على الاحصائتين (Z) التي تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا و (t) والتي تتوزع حسب توزيع (t) وبدرجة حرية $(df = n_1 + n_2 - 2)$ وسنناقش الحالات المختلفة في هذا الفصل.

1.2.8 عندما يكون تباين المجتمعين $(\sigma_1^2 \; ; \sigma_2^2)$ معلومين

يعتمد هذا الاختبار على النظرية (10.5 و11.5) والتي تنص على ان الفرق بين متوسطين $(\bar{x}_1 \; ; \bar{x}_2)$ يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين مقداره $\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ علما ان تلك العينيتين مسحوبتان من مجتماعتهما بشكل مستقل وبحجم $(n_1 \; ; n_2)$ على التوالي. ان خطوات اختبار الفرضية حول الفرق بين المتوسطين تكون كالاتي:

1. صياغة فرضية الاختبار وتكون بصيغتين وحسب الهدف من البحث:

أ. اذا كان الباحث يرغب في مقارنة متوسطي المجتمعين فيما بينهما تكون الفرضية كالاتي:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 & V.S. \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{or} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 & or \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 & \end{array}\right] \quad (1.8)$$

ب. اذا كان الباحث يرغب في مقارنة الفرق بين المتوسطين بقيمة محددة مسبقا نرمز لها بالرمز (d) تكون الفرضية كالاتي:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d & V.S. \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d & \text{or} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > d & or \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < d & \end{array}\right] \quad (2.8)$$

حيث ان : (μ_1) يمثل متوسط المجتمع الاول والذي سحبت منه العينة الاولى.

(μ_2) يمثل متوسط المجتمع الثاني والذي سحبت منه العينة الثانية.

2. حساب احصاءة الاختبار وتكون وفق احد صيغتين وحسب الفرضية وكالاتي:

أ. اذا كانت الفرضية حسب المعادلة (1.8) فان دالة الاختبار تكون كالاتي:

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{3.8}$$

ب. اما اذا كانت الفرضية حسب المعادلة (2.8) فان احصاءة الاختبار تكون كالاتي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{4.8}$$

حيث ان : $(\bar{x}_1)$ يمثل متوسط العينة الاولى ، $(\bar{x}_2)$ يمثل متوسط العينة الثانية ،

(σ_1^2) تباين المجتمع الاول

(σ_2^2) تباين المجتمع الثاني (d) تمثل قيمة محددة مسبقا من قبل الباحث.

3. تحديد مستوى الدلالة (α) ومن ثم تحديد مناطق القبول والرفض وحسب الفرضية البديلة (H_1) والتي تقابل $(Z_{\alpha/2})$ في حالة الاختبار من طرفين و(Z_α) في حالة الاختبار من طرف واحد.

4. القرار الاحصائي ويكون من خلال مقارنة احصاءة الاختبار المحسوبة مع القيمة الجدولية وحسب نوع الفرضية التي يضعها الباحث والتي تعتمد بدورها على طبيعة المشكلة وهدف البحث ويكون نرفض الفرضية الصفرية (H_0) وحسب الحالات الاتية:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \ (d) \xrightarrow{\text{اذا كانت}} |Z_c| > Z_{\alpha/2}$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \ (d) \xrightarrow{\text{اذا كانت}} Z_c > Z_{\alpha} \quad (5.8)$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \ (d) \xrightarrow{\text{اذا كانت}} Z_c < -Z_{\alpha}$$

وسنوضح هذه الخطوات من خلال الامثلة الاتية :

مثال 1.8

استخدمت احدى المستشفيات منظومة جديدة لخدمة المرضى علما ان مستشفى اخر له نفس الظروف و يستخدم الطريقة التقليدية. اراد مدير المستشفى اختبار تأثير هذه المنظومة الجديدة على سرعة تقديم الخدمة عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$. ان المعلومات المتوفرة عن المجتمعين تتلخص بان كليهما يتوزع توزيعا مقاربا للتوزيع الطبيعي وان التباين في المستشفى الاول المستخدم المنظومة الجديدة يساوي (σ_1^2) والتباين في المستشفى الثاني بلغ (σ_2^2) وقام المدير بحساب متوسط مدة الخدمة لعينة تتكون من (18) مريض من المجتمع الاول وكان 26 دقيقة ومتوسط الخدمة لعينة اخرى في المستشفى الثاني بحجم (24) مريض من المجتمع الثاني فكان (27) دقيقة.

الحل:

1- صياغة الفرضية الاحصائية: بما ان الباحث لم يحدد فرق محدد للمقارنة اذن تستخدم المعادلة رقم (1.8) لصياغة الفرضية كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \text{V.S} \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2- حساب احصاءة الاختبار: ان المعلومات المتوفرة لدينا تبين ان المجتمعين يتوزعان توزيعا مقاربا للطبيعي وتبايناتهما معلومين اذن فان احصاءة الاختبار تكون حسب المعادلة (3.8) كالاتي:

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{26 - 27}{\sqrt{\frac{2}{18} + \frac{3}{24}}} = -2.06$$

3- ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 1 عند مستوى المعنوية المحدد كالاتي:

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = -1.645$$

4-القرار الاحصائي : نرفض H_0 لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية اي

$$Z_c = -2.06 < Z_\alpha = -1.645$$

5-رفض الفرضية الصفرية يعني قبول الفرضية البديلة وهذا يعني بان المنظومة الجديدة ساهمت في تخفيض وقت الخدمة المقدمة للمرضى عند مستوى المعنوية المحدد.

مثال 2.8

يرغب احد الباحثين في قياس تأثير نوع معين من الحليب في زيادة وزن الاطفال حديثي الولادة حيث قام باختيار عينة بحجم $(n_1 = 8)$ من مجتمع الاطفال الذين كان تباين الوزن لهم يساوي $(\sigma_1^2 = 1.4)$ فكان متوسط الوزن لهم بعد فترة من التغذية كافية على الحليب يساوي $(\bar{x}_1 = 6.5)$ كغم . واختار عينة اخرى بحجم $(n_2 = 6)$ من مجتمع اخر من الاطفال فكان تباين المجتمع $(\sigma_2^2 = 1.5)$ كغم فكان متوسط الوزن لهم يساوي $(\bar{x}_2 = 5.5)$ كغم . هل يمكن للباحث ان يستنتج بان استخدام الحليب في تغذية الاطفال يؤدي الى زيادة في الوزن لاتزيد عن $(d = 0.5)$ كغم عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.01)$؟

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية: بما ان الباحث لم يحدد فرق محدد للمقارنة اذن تستخدم المعادلة رقم (2.8) لصياغة الفرضية كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0.5 \qquad \text{V.S} \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0.5$$

2-حساب احصاءة الاختبار: ان المعلومات المتوفرة لدينا تبين ان وتباينات المجتمعين معلومه وان الفرضية الصفرية تشير الى مقارنة الفرق بين المتوسطين بمقدار ثابت يرمز له (d) اذن فان احصاءة الاختبار تكون حسب المعادلة (4.8) كالاتي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(6.5 - 5.5) - 0.5}{\sqrt{\frac{1.4}{8} + \frac{1.5}{6}}} = 0.767$$

3- ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 1 عند مستوى المعنوية المحدد كالاتي:

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

4-القرار الاحصائي : نقبل H_0 لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية اي ان :

$$Z_c = 0.767 < Z_\alpha = 2.33$$

5-قبول الفرضية الصفرية يعني رفض الفرضية البديلة وهذا يعني بان استخدام هذا النوع من الحليب لم يساهم في زيادة وزن الاطفال باكثر من نصف كغم عند مستوى المعنوية المحدد.

2.2.8 اذا كان تباينا المجتمعين (σ_2^2 ; σ_1^2) غيرمعلومين

عندما لا تتوفر معلومات عن تبايني المجتمعين وكان التوزيع معلوم او ان يكون التوزيع غير معلوم، عندها نعتمد على حجم العينتين لتحديد احصاءة الاختبار وتكون لدينا الحالات الاتية:

1.2.2.8 اذا كان حجم العينتين كبيرا ($n_1; n_2 \geq 30$): فان الفرق بين المتوسطين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتوزع توزيعا طبيعيا حسب النظرية (12.5) ويوسط حسابي مقداره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين مقداره $(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)$ حيث ان تباين العينة يعتبر تقدير جيد لتباين المجتمع كلما كبر حجم العينة. وتكون خطوات الاختبار ذاتها كما في الحالة الاولى(1.2.8) باستثناء تعويض تباينا المجتمعين $(\sigma_2^2; \sigma_1^2)$ بتبايني العينتين$(S_2^2; S_1^2)$ على الترتيب. وسنوضح هذا من خلال المثال الاتي:

مثال 3.8

يرغب احد الباحثين في قياس تأثير نوع معين من البروتينات في زيادة وزن نوع معين من الحيوانات حيث قام باختيار عينة بحجم $(n_1 = 80)$ حيوان من المجتمع الاول من الحيونات فكان متوسط الوزن لها بعد فترة من التغذية كافية على المواد الغذائية التي تحتوي البروتينات يساوي $(\bar{x}_1 = 16.5)$ كغم وكان تباين الوزن لها يساوي $(S_1^2 = 2.4)$ كغم. واختار عينة اخرى بحجم $(n_2 = 60)$ حيوان من مجتمع اخر من نفس الحيوانات وتم اضافة البروتينات الى تغذيتها فكان متوسط الوزن لهم يساوي $(\bar{x}_2 = 15.5)$ كغم وكان تباين الوزن $(S_2^2 = 2.5)$ كغم . هل يمكن للباحث ان يستنتج بان استخدام البروتينات في تغذية الحيوانات ادى الى زيادة الوزن في المجتمع الاول اكبر من المجتمع الثاني عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.01)$؟

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية كما في المعادلة (1.8) وحسب السؤال البحثي وكالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \text{V.S} \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

2-حساب احصاءة الاختبار كما في المعادلة (3.8) مع استبدال تباين العينة مكان تباين المجتمع على اعتبار انهما تقديران جيدان عنهما وكالاتي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(16.5 - 15.5)}{\sqrt{\frac{2.4}{80} + \frac{2.5}{60}}} = 3.774$$

3-ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 1 عند مستوى المعنوية المحدد كالاتي:

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

4-القرار الاحصائي : نرفض H_0 لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اكبر من القيمة الجدولية اي ان :

$$Z_c = 3.774 > Z_\alpha = 2.33$$

5-رفض الفرضية الصفرية يعني قبول الفرضية البديلة وهذا يعني بان استخدام هذا النوع من البروتينات يساهم في زيادة وزن الحيوانات في المجتمع الاول اكثر من المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية المحدد.

2.2.2.8 اذا كان حجم العينتين او احدهما صغير $(\mathbf{n_1; n_2 < 30})$

اذا كان التوزيع معلوم وكان حجم العينتين او احدهما اقل من 30 مشاهدة تكون لدينا احد الحالتين الاتيتين:

اولا: اذا كان تباينا المجتمعين متساويين:

ان الفرق بين المتوسطين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتوزع حسب توزيع (t) حسب النظرية (13.5) وبوسط حسابي مقداره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين مقداره $(S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2})$. وعليه فان خطوات اختبار الفرضية تكون كالاتي:

1-صياغة الفرضية وتكون كما في المعادلة (1.8) او (2.8).

2-حساب احصاءة الاختبار وتكون كالاتي :

أ- اذا لم تحدد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} \qquad (6.8)$$

ب- اذا تم تحديد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين مقدارها (d):

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d}{S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} \qquad (7.8)$$

حيث ان :(t_c) تمثل القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار والتي تخضع لتوزيع (t) بدرجة حرية $(df = n_1 + n_2 - 2)$. (S_p) يمثل الانحراف المعياري المشترك(pooled standard deviation) ويحسب كالاتي: $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$، (S_1^2) تباين العينة الاولى، (S_2^2) تباين العينة الثانية، $(n_2; n_1)$ حجم العينة الاولى والثانية على الترتيب.

ج- تحديد مستوى المعنوية ومن ثم ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 2 وحسب الفرضية البديلة (H_1) فاما $(t_{(\alpha/2, df)})$ في حالة الاختبار من طرفين او $(t_{(\alpha; df)})$ في حالة الاختبار من طرف واحد.

5-رفض الفرضية الصفرية يعني قبول الفرضية البديلة وهذا يعني بان استخدام هذا النوع من البروتينات يساهم في زيادة وزن الحيوانات في المجتمع الاول اكثر من المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية المحدد.

2.2.2.8 اذا كان حجم العينتين او احدهما صغير $(\mathbf{n_1; n_2 < 30})$

اذا كان التوزيع معلوم وكان حجم العينتين او احدهما اقل من 30 مشاهدة تكون لدينا احد الحالتين الاتيتين:

اولا: اذا كان تباينا المجتمعين متساويين:

ان الفرق بين المتوسطين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتوزع حسب توزيع (t) حسب النظرية (13.5) وبوسط حسابي مقداره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين مقداره $(S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2})$. وعليه فان خطوات اختبار الفرضية تكون كالاتي:

1-صياغة الفرضية وتكون كما في المعادلة (1.8) او (2.8).

2-حساب احصاءة الاختبار وتكون كالاتي :

أ- اذا لم تحدد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} \tag{6.8}$$

ب- اذا تم تحديد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين مقدارها (d):

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d}{S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} \tag{7.8}$$

حيث ان :(t_c) تمثل القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار والتي تخضع لتوزيع (t) بدرجة حرية $(df = n_1 + n_2 - 2)$. (S_p) يمثل الانحراف المعياري المشترك(pooled standard deviation) ويحسب كالاتي: $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$، (S_1^2) تباين العينة الاولى، (S_2^2) تباين العينة الثانية، $(n_2; n_1)$ حجم العينة الاولى والثانية على الترتيب.

ج- تحديد مستوى المعنوية ومن ثم ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 2 وحسب الفرضية البديلة (H_1) فاما $(t_{(\alpha/2,df)})$ في حالة الاختبار من طرفين او $(t_{(\alpha;df)})$ في حالة الاختبار من طرف واحد.

د- القرار الاحصائي ويكون من خلال مقارنة القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار والقيمة الجدولية وحسب الفرضية البديلة وكالاتي:

$$\left.\begin{array}{l} H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \ (d) \xRightarrow{\text{اذا كانت}} |t_c| > t_{(\alpha/2;\, df)} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \ (d) \xRightarrow{\text{اذا كانت}} t_c > t_{(\alpha;\, df)} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \ (d) \xRightarrow{\text{اذا كانت}} t_c < -t_{(\alpha;df)} \end{array}\right] \quad (8.8)$$

وسنوضح هذه الخطوات كما في الامثلة الاتية:

مثال 4.8:

ادعى مدير احدى المستشفيات بان استخدام طريقة جديدة لاستقبال المرضى في العيادة الخارجية تؤدي الى تقليل الخدمة المقدمة للمرضى مقارنة مع مستشفى اخرى لها نفس الظروف تستخدم الطريقة التقليدية لاستقبال المرضى، كانت المعلومات الاولية تشير الى ان توزيع خدمة المرضى تتبع توزيع قريب من التوزيع الطبيعي علما ان تبايني الخدمة في المجتمعين متساويان. لذلك تم سحب عينة من المستشفى الاول بحجم $(n_1 = 18)$ مريض وكان متوسط وقت الخدمة لهم يساوي$(\bar{x}_1 = 26)$ دقيقة وتباين يساوي $(S_1^2 = 2)$ دقيقة في حين تم سحب عينة من المرضى في المستشفى الثاني بحجم $(n_2 = 24)$ وكان متوسط الخدمة لهم يساوي $(\bar{x}_2 = 27)$ دقيقة وتباين يساوي$(S_2^2 = 3)$ دقيقة. هل تتفق مع ادعاء مدير المستشفى عند استخدام مستوى المعنوية$(\alpha = 0.05)$؟

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية وتكون حسب المعادلة (1.8) كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{V.S.} \quad \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2-حساب احصاءة الاختبار كما في المعادلة (6.8) لذلك يجب اولا حساب الانحراف المعياري المشترك كما يأتي:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(18-1)2+(24-1)3}{18+24-2}} = 1.605$$

$$\therefore\ t_c = \frac{26-27}{(1.605)\sqrt{(1/18)+(1/24)}} = -1.992$$

3-ايجاد القيمة الجدولية من جداول توزيع (t) في الملحق 2 وفق المعطيات الاتية:

$$t_{(\alpha;n_1+n_2-2)} = t_{(0.05;18+24-2)} = t_{(0.05;40)} = -1.645$$

4-القرار الاحصائي: نرفض (H_0) لان قيمة احصائة الاختبار المحسوبة اصغر من قيمتها الجدولية

$$t_c = -1.992 < -t_{(\alpha;df)} = -1.645$$

5-الاستنتاج : رفض الفرضية الصفرية يعني بان ادعاء مدير المستشفى صحيح وان الطريقة الجديدة تؤدي الى تقليل مدة الخدمة للمرضى في العيادة الخارجية في المستشفى الاول واقل منها في المستشفى الثاني عند معطيات العينتين ومستوى المعنوية المحدد.

مثال 5.8:

اعتمادا على البيانات في المثال (4.8) اذا علمت بان المدير يعتقد بان الفرق بين متوسطي مدة الخدمة في المستشفيين بسبب استخدام الطريقة الجديدة يقل عن 2 دقيقة. فهل تتفق مع المدير عند هذا الاعتقاد؟

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية وتكون حسب المعادلة (2.8) كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2 \qquad \text{V.S.} \quad \mu_1 - \mu_2 < 2$$

2-حساب احصاءة الاختبار كما في المعادلة (7.8) ومن المثال السابق تم حساب الانحراف المعياري المشترك فكان $(S_p = 1.605)$ وعليه فان احصاءة الاختبار تكون:

$$\therefore\ t_c = \frac{(26-27)-2}{(1.605)\sqrt{(1/18)+(1/24)}} = -5.976$$

3-ايجاد القيمة الجدولية من جداول توزيع (t) من الملحق 2 وفق المعطيات الاتية:

$$t_{(\alpha;n_1+n_2-2)} = t_{(0.05;18+24-2)} = t_{(0.05;40)} = -1.645$$

4-القرار الاحصائي: نرفض (H_0) لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اصغر من قيمتها الجدولية

$$t_c = -5.976 < -t_{(\alpha;df)} = -1.645$$

5-الاستنتاج : رفض الفرضية الصفرية يعني بان ادعاء مدير المستشفى صحيح وان الطريقة الجديدة تؤدي الى تقليل مدة الخدمة للمرضى في العيادة الخارجية في المستشفى الاول واقل منها في المستشفى الثاني عند معطيات العينتين ومستوى المعنوية المحدد.

ثانيا: اذا كان تباينا المجتمعين غير متساويين:

ان الفرق بين المتوسطين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتوزع حسب توزيع (t) حسب النظرية (13.5) وبوسط حسابي مقداره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين مقداره $(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$. وعليه فان خطوات اختبار الفرضية تكون كالاتي:

1-صياغة الفرضية وتكون كما في المعادلة (1.8) او (2.8).

2-حساب احصاءة الاختبار وتكون حسب النظرية اعلاه كالاتي :

أ- اذا لم تحدد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين:

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (9.8)$$

ب- اذا تم تحديد قيمة معينة للفرق بين المتوسطين مقدارها (d):

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (10.8)$$

حيث ان :(t_c) تمثل القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار والتي تخضع لتوزيع (t)، (S_1^2) تباين العينة الاولى، (S_2^2) تباين العينة الثانية، $(n_2; n_1)$ حجم العينة الاولى والثانية على الترتيب ، ودرجة الحرية تحسب وفق الصيغة الاتية:

$$df = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} \qquad (11.8)$$

3- تحديد مستوى المعنوية ومن ثم ايجاد القيمة الجدولية من الملحق 2 وحسب الفرضية البديلة (H_1) فاما $(t_{(\alpha/2,df)})$ في حالة الاختبار من طرفين او $(t_{(\alpha;df)})$ في حالة الاختبار من طرف واحد.

4- القرار الاحصائي ويكون من خلال مقارنة القيمة المحسوبة لاحصاءة الاختبار والقيمة الجدولية وحسب المعادلة (8.8). وسنوضح هذه الخطوات كما في الامثلة الاتية:

مثال 6.8

استخدم البيانات في المثال (4.8) لاختبار الفرضية حول اعتقاد مدير المستشفى اذا علمت ان تبايني المجتمعين غير متساويين:

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية وتكون حسب المعادلة (1.8) كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{V.S.} \quad \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2-حساب احصاءة الاختبار كما في المعادلة (9.8) كما يأتي:

$$\therefore\ t_c = \frac{26-27}{\sqrt{(2/18)+(3/24)}} = -2.058$$

3-ايجاد القيمة الجدولية من جداول توزيع (t) في الملحق 2، لذلك يجب اولا حساب درجة الحرية وفق الصيغة (11.8) وكالاتي:

$$df = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} = \frac{\left[\frac{2}{18} + \frac{3}{24}\right]^2}{\frac{(2/18)^2}{18-1} + \frac{(3/24)^2}{24-1}} = 40$$

$$t_{(\alpha;df)} = t_{(0.05;40)} = -1.645$$

4-القرار الاحصائي: نرفض (H_0) لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اصغر من قيمتها الجدولية

$$t_c = -2.058 < -t_{(\alpha;df)} = -1.645$$

5-الاستنتاج : رفض الفرضية الصفرية يعني بان ادعاء مدير المستشفى صحيح وان الطريقة الجديدة تؤدي الى تقليل مدة الخدمة للمرضى في العيادة الخارجية

في المستشفى الاول واقل منها في المستشفى الثاني عند معطيات العينتين ومستوى المعنوية المحدد.

مثال7.8

يعتقد احد الباحثين ان اضافة مادة بروتينية الى التغذية تؤدي الى زيادة الوزن لدى مجموعة من الحيوانات بمقدار(1.5) كغم، لذلك تم اختيار عينة من المجتمع الاول بحجم (10) حيوانات تم اضافة هذه المادة العضوية الى تغذيتها فكان متوسط الوزن (5.4) كغم وتباين (2.4) كغم، واختار عينة اخرى مستقلة عن الاولى بحجم (12) حيوان فكان متوسط الوزن لها (4.6) كغم وتباين (2.1) كغم. هل تتفق مع الباحث في اعتقاده عند مستوى معنوية (0.01)؟

الحل:

المعطيات من المثال نجد ان تبايني المجتمعين غير متساويين وان:

$n_1 = 10;\ \bar{x}_1 = 5.4;\ S_1^2 = 2.4;\ n_1 = 12;\ \bar{x}_2 = 4.6;$
$S_2^2 = 2.1; d = 1.5$

وعليه فان خطوات اختبار الفرضية تكون كالاتي:

1-صياغة الفرضية الاحصائية وتكون حسب المعادلة (2.8) كالاتي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 1.5 \qquad \text{V.S.} \quad \mu_1 - \mu_2 > 1.5$$

2-حساب احصاءة الاختبار كما في المعادلة (10.8) كالاتي:

$$\therefore\ t_c = \frac{(5.4-4.6)-1.5}{\sqrt{(2.4/10)+(2.1/12)}} = -1.087$$

3-ايجاد القيمة الجدولية من جداول توزيع (t) من الملحق 2 وقبلها يجب حساب درجة الحرية وفق الصيغة (11.8) وكالاتي:

$$df = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left[\frac{2.4}{10}+\frac{2.1}{12}\right]^2}{\frac{(2.4/10)^2}{10-1}+\frac{(2.1/12)^2}{12-1}} = 18.7 \approx 19$$

وعليه فان القيمة الجدولية تكون كالاتي:

$$t_{(\alpha;df)} = t_{(0.01;19)} = 2.539$$

4-القرار الاحصائي: نقبل (H_0) لان قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اصغر من قيمتها الجدولية

$$t_c = -1.087 < t_{(\alpha;df)} = 2.539$$

الاستنتاج : قبول الفرضية الصفرية يعني بان ادعاء مدير المستشفى غير صحيح وان اضافة المادة البروتينية الى تغذية الحيوانات لم تؤدي الى زيادة الوزن بالمقدار المحدد وعند معطيات العينتين ومستوى المعنوية المحدد.