2.2.3 تقدير دالة الارتباط الذاتي

أوضحنا سابقاً أهمية وضع شروط السكون على العملية العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة (المتاحة) وأهمها تخفيض عدد المعالم الرئيسية (عـــزوم الدرجـــة الأولي والثانية) وسهولة تفسيرها وإمكانية تقديرها باستخدام مشاهدات السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ وبناء على هذه التقديرات يمكن تقدير دالة الارتباط الـــذاتي للعمليـــة العشوائية الساكنة بأحد التقديرين الآتيين

$$r(k) = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

$$r_0(k) = \tilde{\rho}(k) = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

وفي الحقيقة أن هذين التقديرين متحيزان biased، ولذلك فليس هنـــاك أيـــة أفـضلية لإحداهما على الآخر، وعادة ما يستخدم التقدير الأول $r(k)$ لتقدير دالة الارتباط الذاتي، وهذا التقدير هو الذي سنستخدمه بالفعل في هذا الكتاب. ويمكن إثبات أنـــه إذا كانـــت العملية العشوائية $\{y_t\}$ ساكنة وخطية وأن العزم الرابع $E(Y_t^4)$ محدود فإن تقدير دالة الارتباط الذاتي $r(k)$ يتبع تقاربياً (إذا كانت n كبيرة) توزيع معتاد(معتـــدل) Normal متوسطه $\rho(k)$ وله تباين معين معروف يعتمد على $\rho(k)$ أيضاً. ومن ثم يمكن إجراء الاختبارات الإحصائية الخاصة بمعنوية significance الارتباطات الذاتية المختلفـــة.

والحالة الخاصة الهامة إذا كانت العملية العشوائية موضع الدراسة عملية "اضطرابات هادئة" فإن تباين $r(k)$ يأخذ الصورة البسيطة الآتية:

$$V[r(k)] \approx \frac{1}{n}$$

ومن ثم يمكن اختبار معنوية الارتباط الذاتي في هذه الحالة بشكل تقريبي كنا سنري عند تشخيص نماذج *ARIMA* في الباب الرابع. والمثال الأتي يوضح كيفية حساب معاملات الارتباط الذاتي

مثال(9):

تمثل البيانات الآتية عدد الوحدات المباعة بالمائة سنوياً من إحدى السلع في أحد المحلات الكبرى

السنة	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
عدد الوحدات بالمائة	1	3	2	4	3	2	3	2

احسب معاملات الارتباط الذاتي وارسم دالة الارتباط المقدرة

الحــــل:

$$\bar{y} = \frac{20}{8} = 2.5 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{8}(y_t - \bar{y})^2 = 6$$

$$r(1) = \frac{\sum_{t=1}^{7}(y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{6}$$

$$r(1) = \frac{1}{6}[(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y})(y_3 - \bar{y}) + (y_3 - \bar{y})(y_4 - \bar{y})$$

$$+ (y_4-\overline{y})(y_5-\overline{y}) + (y_5-\overline{y})(y_6-\overline{y}) + (y_6-\overline{y})(y_7-\overline{y})$$

$$+ (y_7-\overline{y})(y_8-\overline{y})] = -0.29$$

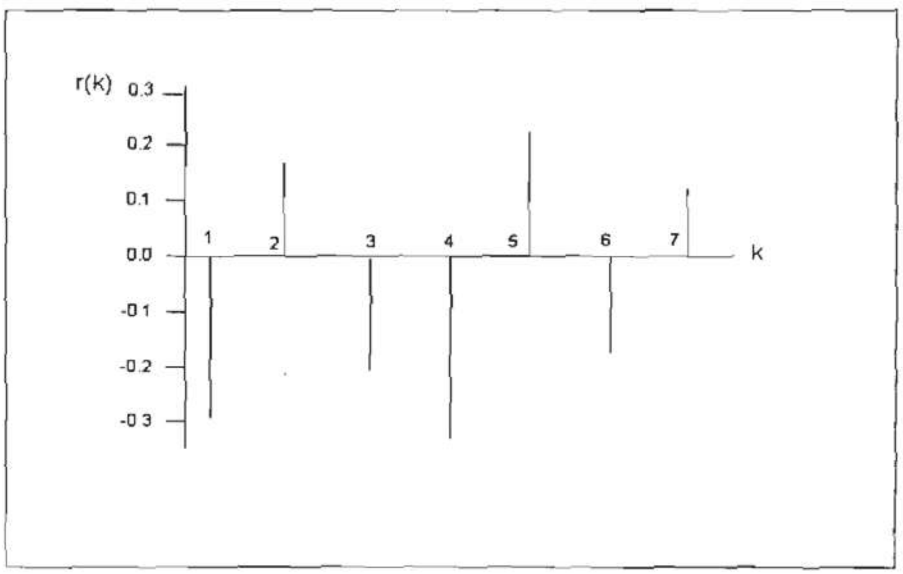
$$r(2) = \frac{1}{6}[(y_1-\overline{y})(y_3-\overline{y}) + (y_2-\overline{y})(y_4-\overline{y}) + (y_3-\overline{y})(y_5-\overline{y})$$

$$+ (y_4-\overline{y})(y_6-\overline{y}) + (y_5-\overline{y})(y_7-\overline{y}) + (y_6-\overline{y})(y_8-\overline{y})] = 0.17$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$r(3) = -0.21$; $r(4) = -0.33$; $r(5) = 0.21$; $r(6) = -0.17$; $r(7) = 0.13$

ومنه يمكن عرض دالة الارتباط الذاتي المقدرة في الشكل(3)



شكل (3): دالة الارتباط الذاتي للمثال (9)

مثال(10):

تمثل البيانات الآتية متوسط النسبة المئوية السنوية للرطوبة في إحدى المدن

السنة	1990	1991	1992	1993	1994
عدد الوحدات بالمائة	20	30	10	20	20

ارسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البيانات.

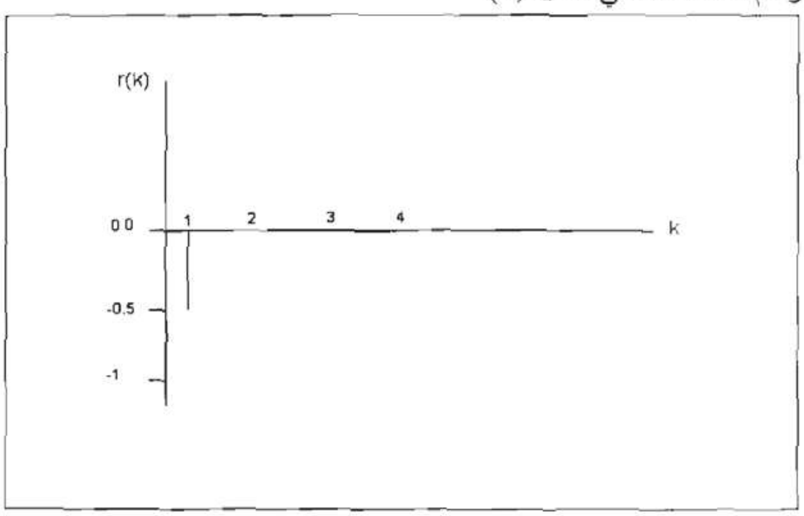
الحـــــل:

$$\bar{y} = \frac{100}{58} = 20 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{5} (y_t - \bar{y})^2 = 200$$

يمكن بسهولة إثبات أن

$$r(1) = -\frac{1}{2} \;\; ; \;\; r(2) = r(3) = r(4) = 0$$

ويمكن رسم هذه الدالة في شكل (4)



شكل(4): دالة الارتباط الذاتي للمثال (10)