$$\Delta^{*} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \phi \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \phi\rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \cdots & \phi\rho(2) \\ \rho(3) & \rho(2) & \cdots & \phi\rho(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \phi\rho(k-1) \end{bmatrix}$$

بأخذ ϕ عامل مشترك من العمود الأخير نجد أن العمودان الأول والأخير متـشابهان تمامًا وبالتالي فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر لأي قيمة $k = 2, 3, \ldots$

وبالتالي فإن

$$\phi_{kk} = 0 \quad ; \; k = 2,3,\cdots$$

وبالتعريف وجدنا أن

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

ومن ثم فإن

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho(1) & ; \; k = 1 \\ 0 & ; \; k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

أي أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي للعمليات AR (1) تنقطع فجأة بعد الفجـوة الزمنية الأولي.

3.4.2 عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية

يقال أن $\{y_t\}$ عملية انحدار ذاتي من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنها في الصورة

$$y_t = \varepsilon_t + \phi_1 \, y_{t-1} + \phi_2 \, y_{t-2} \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.4.8)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ عملية الاضطرابات الهادئة، و ϕ_1, ϕ_2 ثابتان يمثلان معلمتـــي النمـــوذج، وعادة ما يفترض أن $\{\varepsilon_t\}$ عملية جاوس. ويمكن كتابة النمـــوذج (3.4.8) باســـتخدام مؤثر الإزاحة للخلف كالآ تي.

$$\phi(B)\, y_t = \varepsilon_t$$

حيث

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

وبافتراض وجود $\phi^{-1}(B)$ يمكن كتابة الصورة (3.4.8) على الشكل

$$y_t = \phi^{-1}(B)\, \varepsilon_t$$

حيث ينظر للمتتابعة $\phi^{-1}(B)$ كمرشح يربط بين ε_t والعملية $\{y_t\}$

وعمليات الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية – والتي يشار إليهـــا اختـــصارًا بـــالرمز $AR(2)$– قد تكون ساكنة أو غير ساكنة، ويتوقف سكون هذه العمليات على خصائص المرشح $\phi^{-1}(B)$، ومن ثم يجب وضع بعض القيود على المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 أو حول المرشح $\phi^{-1}(B)$ لضمان سكون هذه العمليات.

دالة جرين وشروط السكون

يمكن كتابة النماذج $AR(2)$ على الصورة

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\, y_t = \varepsilon_t \qquad (3.4.9)$$

سنفترض أن G_1, G_2 هما جذرا المعادلة

$$B^2 - \phi_1 B - \phi_2 = 0 \qquad (3.4.10)$$

في الواقع توجد علاقة جبرية بسيطة وهامة بين جذري المعادلة (3.4.10) وجـــذري المعادلة المميزة الآتية:

$$1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=0 \tag{3.4.11}$$

هذه العلاقة هي أنه يمكن بسهولة إثبات أنه إذا كان G_1, G_2 هما جــذري المعادلــة (3.4.10) فإن جذري المعادلة (3.4.11) هما G_1^{-1}, G_2^{-1} وبالتالي فإن.

$$1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=(1-G_1 B)(1-G_2 B)$$

حيث

$$G_1=\frac{1}{2}[\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}]$$

$$G_2=\frac{1}{2}[\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}]$$

ومن ثم يمكن كتابة (3.4.9) على الصورة

$$y_t=(1-G_1 B)^{-1}(1-G_2 B)^{-1}\varepsilon_t$$

وذلك بافتراض وجود $(1-G_2 B)^{-1},(1-G_1 B)^{-1}$

باستخدام الكسور الجزئية

$$y_t=\left[\frac{G_1}{(G_1-G_2)(1-G_1 B)}+\frac{G_2}{(G_2-G_1)(1-G_2 B)}\right]\varepsilon_t$$

$$y_t=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)}+\frac{G_2^{j+1}}{(G_2-G_1)}\right]\varepsilon_{t-j}$$

وبالتالي فإن دالة جرين هي

$$\psi_j=\frac{G_1^{j+1}}{(G_1-G_2)}-\frac{G_2^{j+1}}{(G_1-G_2)} \quad ; G_1\neq G_2 \tag{3.4.12}$$

إذا كان المقدار $0 < \phi_1^2 + 4\phi_2$ فإن الجذريين G_1, G_2 يكونا حقيقيان real وبالتالي فإن ψ_i تكون الفرق (أو مجموع) دالتين أسيتين. أما إذا كان المقدار $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ فإن الجذرين يكونا مركبان complex وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن ψ_j تمثل موجات من دوال الجيب. من (3.4.12) نستطيع القول بأن عمليات AR (2) تكون ســاكنة إذا كان $|G_1|<1 \;;\; |G_2|<1$ أي أن الشروط الضرورية لسكون عمليات AR(2) هي أن جذري المعادلة المميزة $\phi(B) = 0$ يجب أن يقعا خارج دائرة الوحدة.

مثال (5):

في إحدى عمليات AR (2) كان $\phi_1 = 0.5 \;;\; \phi_2 = -0.2$. احسب دالة جرين واختبر سكون هذه العملية.

الحـــــل:

$$G_1 = \frac{1}{2}[1+\sqrt{1+4(-0.2)}] = 0.724$$

$$G_2 = \frac{1}{2}[1-\sqrt{1+4(-0.2)}] = 0.276$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{(0.724-0.276)} - \frac{(0.276)^{j+1}}{(0.724-0.276)}$$

$$\psi_j = \frac{(0.724)^{j+1}}{0.448} - \frac{(0.276)^{j+1}}{0.448}$$

$$\lim_{j\to\infty} \psi_j \to 0$$

ومن ثم فالعملية ساكنة

مثال (6):

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع النموذج $y_t = 0.8\, y_{t-1} - 0.15\; y_{t-2} + \varepsilon_t$ أوجد جذري المعادلة المميزة ودالة جرين واختبر سكون السلسلة.

الحـــــــل:

$$\phi_1 = 0.8 \quad ; \quad \phi_2 = -0.15$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\;[0.8 + \sqrt{0.64 - 0.6}] = 0.5$$

$$G_2 = \frac{1}{2}[0.8 - \sqrt{0.64 - 0.6}] = 0.3$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة المميزة هما

$$G_1^{-1} = (0.5)^{-1} = 2 \;\; ; \;\; G_2^{-1} = (0.3)^{-1} = 3.33$$

$$\psi_j = \frac{(0.5)^{j+1}}{0.2} - \frac{(0.3)^{j+1}}{0.2}$$

حيث إن $i = 1, 2 \;\; ; \;\; 1 < |G^{-1}| > 1$ فالعملية ساكنة. أيضًا واضح أن $\lim\; \psi_j \to 0$

مثال (7):

إذا كانت $\{y_t\}$ عملية $AR\;\;(2)$ حيث $\phi_1 = 0.6 \;\; ; \;\; \phi_2 = -0.8$ أوجد جذرى المعادلة المميزة. هل هذه العملية ساكنة؟

الحـــــــل:

$$\phi\ (B) = 1 - \phi_1\, B - \phi_2\, B^2 = 1 - 0.6\, B + 0.8\, B^2 = 0$$

$$(1 - 0.2\, B)\,(1 - 0.4\, B) = 0$$

$$G_1^{-1} = (0.2)^{-1} = 5\ > 1 \quad ; \quad G_2^{-1} = (0.4)^{-1} = 2.5\ > 1$$

ومن ثم فالعملية ساكنة

مثال (8) :

في إحدى عمليات AR (2) كـــان $\phi_1 = 2.4 \;\; ; \;\; \phi_2 = -0.8$ أوجـــد جـــذري المعادلة المميزة واختبر سكون هذه العملية.

الحـــــــل:

$$1 - \phi_1\, B - \ \phi_2\, B^2 = 1 - 2.4\, B + 0.8\, B^2 = 0$$

$$(1 - 2\, B)\,(1 - 0.4\, B) = 0$$

$$G_1^{-1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad G_2^{-1} = \ 2.5$$

أحد الجذرين أقل من الواحد وبالتالي فالعملية غير ساكنة.

مثال (9):

في إحدى عمليات AR (2) كان $\phi_1 = 1 \;\; ; \;\; \phi_2 = -0.5$ أوجد جذري المعادلة المميزة واختبر سكون العملية.

الحــــــل:

المعادلة المميزة

$$1 - B + 0.5\ B^2 = 0$$

$$G_i^{-1} = 1 \pm \sqrt{1 - 4\,(0.5)} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

$$G_i^{-1} = 1 \pm i = a\ +\ bi$$

$$G_1^{-1} = 1\ +\ i\ \ ;\ G_2^{-1} = 1\ -\ i$$

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$|\,G_1^{-1}\,| = |\,G_2^{-1}\,| = \sqrt{2} > 1$$

وبالتالي فالعملية ساكنة.

وكما نعلم أن كل من جذري المعادلة المميزة هو دالة في معلمتـــي النمـــوذج ϕ_1, ϕ_2، ولذلك فإن أول ما يتبادر إلى الذهن بعد اختبـــار الـــسكون بفحــص هـــذين الجذرين هو الاستفسار عن إمكانية التعبير عن شرطي سكون عمليات AR(2) بدلالة معلمتي النموذج مباشرة. وفي الواقع أنه يمكن التعبير عن شرطي ســكون العمليـــات AR(2) في صورة ثلاث شروط أخرى بدلالة المعلمتين ϕ_1, ϕ_2 مباشرة. هذه الشروط هي:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| \quad &< 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.13)$$

وتعني هذه الشروط أن قيم ϕ_1, ϕ_2 يجب أن تقع داخل منطقة مثلثية رؤوسها (-1 ,-2-) ,(0, 1) ,(-1 ,2) لكي تكون عمليات AR (2) ساكنة. ولاشتقاق الشروط (3.4.13) نعلم أن:

$$G_1 + G_2 = \phi_1 \qquad (1)$$

$$G_1 G_2 = -\phi_2 \qquad (2)$$

$$|G_1| < 1 \quad ; |G_2| < 1 \qquad (3)$$

من (2)

$$|\phi_2| = |G_1| \; |G_2|$$

بالتعويض من (3)

$$|\phi_2| < 1 \qquad (i)$$

أيضًا

$$G_1(1-G_2) < (1-G_2)$$

وهذا يؤدي إلى

$$(G_1 + G_2) - G_1 G_2 < 1 \qquad (4)$$

بالتعويض من (1) ، (2) في (4)

$$\phi_1 + \phi_2 < 1 \qquad (ii)$$

وبالمثل فإن

$$-(1+G_2) < G_1(1+G_2)$$

وهذا يؤدي إلى

$$-G_1 G_2 - (G_1 + G_2) < 1 \qquad (5)$$

بالتعويض من (1) ,(2) في (5)

$$\phi_2 - \phi_1 < 1 \qquad \text{(iii)}$$

الشروط (i) ,(ii) ,(iii) تعادل الشروط (3.4.13)، ومن ثم يكون قد تم برهـــان شروط سكون العمليات AR (2) بدلالة المعالم مباشرة.

مثال (10):

إذا كان $y_t = 0.7\,y_{t-1} - 0.2\,y_{t-2} + \varepsilon_t$ هل السلسلة $\{y_t\}$ ســـاكنة؟ اشـــرح سبب إجابتك.

الحــــــل:

$$\phi_2 + \phi_1 = -0.2 + 0.7 = 0.5 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -0.2 - 0.7 = -0.9 < 1$$

$$|\phi_2| = 0.2 < 1$$

شروط السكون الثلاثة متحققة ، وبالتالي فإن هذه السلسلة ساكنة.

مثال (11):

إذا كانت $\{y_t\}$ إحدى عمليـــات AR (2) حيـــث $\phi_2 = -0.5$; $\phi_1 = 1.5$. اختبر سكون هذه العملية.

الحــــــل:

$$\phi_2 + \phi_1 = -0.5 + 1.5 = 1$$

الشرط الأول من شروط السكون غير متحقق، ومن ثم فالعملية غير ساكنة .

وقبل أن نختتم الحديث عن دالة جرين أو أوزان ψ تجدر الإشارة إلى أنه في بعض الأحيان قد ينصب الاهتمام على معرفة بعض أوزان ψ الأولى بدلالة المعلمتين ϕ_1 , ϕ_2 مباشرة. وفي مثل هذه الحالات قد يفضل إيجاد هذه الأوزان من العلاقة بين $\pi(B), \psi(B)$ كما يلي

$$\pi(B)\ \psi(B) = 1$$

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)(1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1$$

بمساواة معاملات B^j في الطرفين نصل إلى

$$\psi_1 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

وبصفة عامة يمكن إثبات أن

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} \ ; \ j \geq 3$$

ومن ثم فإن العمليات AR (2) تكون ساكنة إذا كانـــت الأوزان ψ_j تتقـــارب وكـــان $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

مثال (12):

في إحدى عمليات AR(2) كان $\phi_1 = 1 \ ; \ \phi_2 = -0.5$ أوجـــد أول أربعـــة أوزان ψ

الحـــــل:

$$\psi_1 = \phi_1 = 1$$

$$\psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\psi_3 = \phi_1 \ \psi_2 + \phi_2 \ \psi_1 = 1 \ (0.5) - 0.5\,(1) = 0$$

$$\psi_4 = \phi_1 \ \psi_3 + \phi_2 \ \psi_2 = 1 \ (0) - 0.5\,(0.5) = -0.25$$

ونستعرض فيما يلي أهم خصائص عمليات AR(2) الساكنة.

دالة الارتباط الذاتي

بأخذ توقع طرفي المعادلة (3.4.8)

$$E(Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2})$$

بافتراض سكون العملية فإن

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-2}) = \mu$$

ومن ثم فإن

$$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\mu = E(Y_t) = 0 \ ; \ \phi_1 + \phi_2 < 1$$

ويمكن حساب التباين كما يلي

$$\operatorname{Var}(Y_t) = \gamma(0) = \operatorname{Cov}(Y_t, Y_t)$$

$$\gamma(0) = \operatorname{Cov}(Y_t, \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$