يعادل القول بعدم ارتباط مشاهدات السلسلة y_t. وعادة ما يفترض اعتيادية الأخطاء العشوائية عند إجراء الاستدلالات الإحصائية المختلفة.

الاتجاه الخطي Linear Trend

تظهر الكثير من الظواهر التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة اتجاهًا عامًا خطيًا مع الزمن على المدى الطويل، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج الملاءم على الصورة

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \qquad (1.8.2)$$

حيث تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t، والثابتان β_0, β_1 يمثلان معلمتي النموذج أو معاملي الانحدار. ويكون النموذج ملاءمًا إذا كان مستوى السلسلة يتغير بمقدار ثابت بتغير الزمن فترة زمنية واحدة. وينحصر تقدير الاتجاه العام في تقدير معلمتي النموذج β_0, β_1 . ويذكرنا هذا النموذج على الفور بنموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يلعب المتغير $t = 1,2,\ldots,n$ دور المتغير المستقل، ومن ثم يمكن كتابة النموذج (8.1.1) في صورة مصفوفات كما يلي

$$Y = X\,\beta + \varepsilon \qquad (1.8.3)$$

حيث Y متجه عمودي من الرتبة n يحتوى على مشاهدات السلسلة، أي أن

$$Y = [y_1 \quad y_2 \ldots y_n]'$$

والمصفوفة X من الرتبة $n \times 2$ ، عناصر عمودها الأول كلها تساوي الواحد الصحيح، وعناصر عمودها الثاني هي القيم المختلفة للوحدات الزمنية وتساوي دائمًا الأعداد $1,2,\ldots,n$ بغض النظر عن طبيعة الوحدات الزمنية المستخدمة (سنة – شهر – يوم – ....)، أي أن

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

أما المتجه العمودي β فهو من الرتبة 2 ويحتوي على معلمتي النموذج، أي أن

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

والمتجه العمودي ε من الرتبة n ويحتوي على المتغيرات ε_t أي أن

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n]'$$

بافتراض صحة النموذج (8.1.3) تخبرنا دراسة الانحدار أن تقدير المربعات الصغرى لمتجه المعالم هو

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (1.8.4)$$

حيث

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} t \\ \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} t^2 \end{bmatrix}; \qquad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t y_t \end{bmatrix}$$

ويكون متجه القيم المقدرة كالتالي

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ومتجه البواقي هو

$$e = \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$$

ومجموع مربعات البواقي هو

$$SSE = e'e = \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 = Y'Y - \hat{\beta}' X' Y$$

وتقدير تباين الأخطاء هو

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

وتقدير تباين مقدرات المربعات الصغرى هو

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = s^2 (X'X)^{-1} = s^2 C$$

حيث

$$C = (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

ومن ثم يكون تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad (1.8.5)$$

ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام المقدرة (8.1.5) في تقدير الاتجاه العام للظـــاهرة لكل الفترات الزمنية المتاحة بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1,2,\ldots,n$ فنحصل على القيم الاتجاهية $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$. فضلاً عن ذلك يمكن استخدام هذه المعادلة في التنبؤ بما سيكون عليه الاتجاه العام للظاهرة في فترات زمنية غير موجودة ولكنها قريبة من نطاق الزمن المستخدم، فإذا كنا نرغب – على سبيل المثال– في التنبؤ بالاتجاه العـــام عند الزمن $t = t_0$ نعوض بهذه القيمة في المعادلة المقدرة (8.1.5) لنحصل على تنبؤ

الاتجاه المناظر $\hat{y}_0$. كما يمكن إنشاء فترة ثقة للاتجاه العام الحقيقي عند الزمن $t = t_0$ بافتراض اعتيادية normality الأخطاء ε_t كما يلي

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} s \left[1 + x_0'(X'X)^{-1}x_0\right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$x_0' = [1 \quad t_0]$$

ويشير الرمز $t_{\alpha/2,n-2}$ إلى القيمة الجدولية التي نحصل عليها من توزيع t بدرجات حرية (n-2) وتحصر على يمينها مساحة مقدارها $\frac{\alpha}{2}$ حيث يمثل $(1-\alpha)$ درجة الثقة المطلوبة ويمثل الاختبار الخاص بمعنوية المعلمة β_1 أهمية خاصة حيث تحدد هذه المعلمة وجود أو عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة، ويستخدم الإحصاء t المعرف بالصيغة التالية للحكم على معنوية هذه المعلمة

$$t = \hat{\beta}_1 / s\sqrt{c_{22}}$$

والذي يتبع توزيع t بدرجات حرية $(n - 2)$ بافتراض صحة الفرض العدمي $\beta_1 = 0$، ومن ثم نرفض الفرض العدمي إذا كان $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ وفي هذه الحالة نقر بوجود اتجاه خطي في الظاهرة. ومن ناحية أخرى إذا لم يتم رفض الفرض العدمي فإن هذا يعني عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة ويتم توفيق النموذج الآتي بدلاً من النموذج الخطي

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t \qquad (1.8.6)$$

ويمكن في هذه الحالة إثبات أن (انظر تمرين18)

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 = \bar{y}$$

مثال (5):

فيما يلي بيانات عن عدد المواليد (بالآلاف) في إحدى الدول في عـدد مـن السنوات

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000
عدد المواليد	15	20	35	30	35	40

1. أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية
2. أوجد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة
3. اختبر معنوية العلاقة بين الظاهرة والزمن
4. تنبأ بقيمة الاتجاه العام سنة 2001
5. كون فترة ثقة مناسبة لقيمة الاتجاه الحقيقي سنة 2001

الحـل:

$$(X\ X) = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}$$

$$(X\ X)^{-1} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X\ Y = \begin{bmatrix} 175 \\ \\ 695 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} 1330 \\ \\ 495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.67 \\ \\ 4.71 \end{bmatrix}$$

1. تقدير معادلة الاتجاه

$$\hat{y}_t = 12.67 + 4.71t$$

2. بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1,2,\ldots,6$ نحصل على القيم الاتجاهية

$$\hat{y}_1 = 12.67 + 4.71\ (1) = 17.38$$

$$\hat{y}_2 = 22.09\ ;\quad \hat{y}_3 = 26.8\ ;\quad \hat{y}_4 = 31.51\ ;\quad \hat{y}_5 = 36.22\ ;\quad \hat{y}_6 = 40.93$$

ومن ثم فإن الأخطاء المقدرة

$$e_t = y_t - \hat{y}_t\ ;\quad t = 1,2,\ldots,6$$
$$e_1 = -2.38\ ;\quad e_2 = -2.09\ ;\ e_3 = 8.2$$
$$e_4 = -1.51\ ;\quad e_5 = -1.22\ ;\ e_6 = -0.93$$

.3

$$SSE = \sum_{1}^{6} e_t^2 = 81.906$$

$$s^2 = 81.906 / 4 = 20.4765 \quad ; \qquad s = 4.525$$

$$t = 4.71/(4.525)\sqrt{6/105} = 4.324$$

عند $\alpha = 0.05$

$$t_{\alpha/2,4} = t_{0.025,4} = 2.776$$

القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ولذلك نرفض الفـرض العـدمي $\beta_1 = 0$ ونقر بوجود علاقة خطية معنوية بين الظاهرة والزمن بمستوى معنوية 5%

4. نعوض في المعادلة المقدرة عن $t = 7$

$$\hat{y}_7 = 12.67 + 4.71(7) = 45.64$$

$$x_o' = [\,1 \quad 7\,]$$

$$x_o'(X'X)^{-1} = \frac{1}{105}[-56 \qquad 21]$$

$$x_o'(X'X)^{-1}x_0 = 0.87$$

.5

ومن ثم فإن الخطأ المعياري للمقدر $\hat{y}_7$ هو

$$SE(\hat{y}_0) = 4.525 \quad [1+0.87]^{\frac{1}{2}} = 6.19$$

ومن ثم فإن 95% فترة ثقة للاتجاه الحقيقي هي

$$45.64 \pm (2.776)\ (6.19) = (28.46\ ,\ 62.82)$$