3.2.9 تحليل التباين باتجاهين (Two-way ANOVA)

يدرس اسلوب تحليل التباين باتجاه واحد تأثير متغير واحد على المتغير المعتمد (Y_{ij}) ومن ثم تجزئة مجموع المربعات الى مركبتين احدهما تمثل تأثير هذا المتغير والباقي يعود الى العوامل العشوائية او الصدفة. اما في حالة تحليل التباين باتجاهين فاننا ندرس تأثير متغيرين على المتغير المعتمد (Y_{ij}) احدهما يمثل الصفوف (Rows) والثاني يمثل الاعمدة (Columns)، كل منهما يمكن ان يكون متغير وصفي او كمي يمكن تجزئته الى عدد من المستويات، فعلى سبيل المثال عندما نرغب بدراسة تأثير مستويات العلاج للمرضى واساليب العلاج المتبعة على المتغير المعتمد (Y_{ij}) الذي يمثل متوسط نسبة الشفاء من المرض. والجدول الاتي يوضح توزيع المشاهدات بواقع مشاهدة واحدة لكل خلية.

جدول (3.9) توزيع مشاهدات المتغير المعتمد على مستويات المتغيرين

Rows الصفوف	(Columns) الاعمدة						Total المجموع	Means المتوسطات
	1	2	…	j	…	C		
1	Y_{11}	Y_{12}	…	Y_{1j}		Y_{1C}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	…	Y_{2j}	…	Y_{2C}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
. .	. .	. .	…	. .	…	. .	. .	. .
i	Y_{i1}	Y_{i2}	…	Y_{ij}	…	Y_{iC}	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
. .	. .	. .	…	. .	…	. .	. .	. .
R	Y_{R1}	Y_{R2}	…	Y_{Rj}	…	Y_{RC}	$Y_{R.}$	$\bar{Y}_{R.}$
Total المجموع	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	…	$Y_{.j}$	…	$Y_{.C}$	$Y_{..}$	---
Means المتوسطات	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$	…	$\bar{Y}_{.j}$	…	$\bar{Y}_{.C}$	---	$\bar{Y}_{..}$

حيث ان:

$(Y_{i.})$ تمثل مجموع مشاهدات الصف (i)، $(Y_{.j})$ تمثل مجموع مشاهدات العمود(j)، $(\bar{Y}_{i.})$ تمثل متوسط مشاهدات الصف (i)، $(\bar{Y}_{.j})$ تمثل متوسط مشاهدات العمود (j)، $(Y_{..})$ تمثل المجموع الكلي للمشاهدات، $(\bar{Y}_{..})$ تمثل المتوسط العام للمشاهدات، $(i = 1,2, \dots, R)$ و $(j = 1,2, \dots, C)$.

وتقوم فكرة تحليل التباين باتجاهين على تجزئة مجموع المربعات الى ثلاث مركبات الاولى تمثل تأثير مستويات المتغير الاول (الصفوف) والثانية تمثل تأثير مستويات المتغير الثاني (الاعمدة) والثالثة تمثل تأثير العوامل العشوائية او الصدفة ويسم بالخطأ التجريبي، اي ان:

$$\sum_i^R \sum_j^C \left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \sum_i^R \sum_j^C (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i^R \sum_j^C \left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)^2 + \sum_i^R \sum_j^C \left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)^2 \quad (11.9)$$

ويمكن التعبير عن عناصر المعادلة (11.9) بدلالة مجموع المربعات(Sum of Squares) وبالشكل الاتي:

$$SST = SSR + SSC + SSE \tag{12.9}$$

حيث ان: (SSE) يمثل مجموع المربعات الكلي (Total Sum of Squares)، (SSR) تمثل مجموع مربعات الصفوف (Rows Sum of Squares)، (SSC) يمثل مجموع مربعات الاعمدة (Columns Sum of Squares)، (SSE) مجموع مربعات الخطأ (Error Sum of Squares). ولغرض اختبار الفرضيات حول تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير المعتمد نتبع الخطوات الاتية:

1- صياغة الفرضية الاحصائية كالاتي :

أ- الفرضية التي تتعلق بتأثير الصفوف كالاتي:

$$\begin{aligned} &H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_R \\ &H_1: At\ least\ two\ means\ are\ differing \end{aligned} \tag{13.9}$$

ب- الفرضية التي تتعلق بتأثير الاعمدة كالاتي:

$$\left.\begin{aligned} &H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_C \\ &H_1: At\ least\ two\ means\ are\ differing \end{aligned}\right] \tag{14.9}$$

2- حساب احصاءة الاختبار ويتم ذلك من خلال بناء جدول تحليل التباين ولتسهيل العمليات الحسابية للحصول على مجاميع المربعات كما في المعادلة (12.9) نستخدم المعادلات الاتية:

$$\left.\begin{aligned} SST &= \textstyle\sum_i^R \sum_j^C Y_{ij}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2 \\ SSR &= C \textstyle\sum_i^R \bar{Y}_{i.}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2 \\ SSC &= R \textstyle\sum_j^C \bar{Y}_{.j}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2 \\ SSE &= SST - SSR - SSC \end{aligned}\right] \tag{15.9}$$

جدول (4.9) يمثل جدول تحليل التباين باتجاهين(Two-Way ANOVA)

Source of Variation (S.V) مصدر الاختلاف	Sum of Squares مجموع المربعات	Degrees of Freedom (df) درجات الحرية	Mean of Squares متوسط المربعات	F_c قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة
Within Levels of Rows بين مستويات الصفوف	SSR	$v_1 = R - 1$	$MSR = SSR/v_1$	$F_{cR} = \frac{MSR}{MSE}$
Within Levels of Columns بين مستويات الاعمدة	SSC	$v_3 = C - 1$	$MSC = SSC/v_3$	$F_{cC} = \frac{MSC}{MSE}$
Between The Levels (Error) بين المستويات (الخطأ التجريبي)	SSE	$v_2 = (R-1)(C-1)$	$MSE = SSE/v_2$	---
Total المجموع الكلي	SST	$v = RC - 1$	---	---

3-ايجاد القيم الجدولية من جداول توزيع (F) في الملحق 3 وحسب المعطيات في جدول تحليل التباين ومستوى المعنوية المحددة ($F_{(\alpha;v_1;v_2)}$) و($F_{(\alpha;v_3;v_2)}$) لاختبار الفرضية الاولى والثانية على الترتيب.

4-القرار الاحصائي : نرفض الفرضية الصفرية (H0) اذا كانت قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة اكبر من قيمتها الجدولية المناظرة لها.

5-الاستنتاج وتفسير النتائج، ولتوضيح هذه الخطوات نورد الامثلة الاتية:

مثال 7.9

اراد طبيب بيطري دراسة تأثير اربعة اصناف من الغذاء على زيادة الوزن لمجموعة من الاغنام تنتمي لثلاث سلالات مختلفة، وبعد الانتهاء من التجربة تم وزن الاغنام والحصول على الزيادة في الوزن (كغم)، كما موضح بالجدول الاتي:

سلالات الاغنام	اصناف الغذاء				المجموع
	A	B	C	D	
I	12	13	16	15	56
II	16	17	16	17	66
III	19	18	17	18	72
المجموع	47	48	49	50	194

المطلوب: استخدم اسلوب تحليل التباين باتجاهين، مستخدما $(\alpha=0.05)$ لاختبار الفروق بين:

أ- اصناف الغذاء على زيادة الوزن. ب- السلالات الثلاث على زيادة الوزن.

الحل:

1-صياغة الفرضية الاحصائية وحسب العلاقة (13.9 و 14.9)وتكون:

أ- الفرضية التي تتعلق بالسلالات:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1: At\ least\ two\ means\ are\ differing$$

ب- الفرضية التي تتعلق باصناف الغذاء :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$
$$H_1: At\ least\ two\ means\ are\ differing$$

2-حساب احصاءة الاختبار وذلك من خلال بناء جدول تحليل التباين باتجاهين ولتحقيق هذا الغرض نستخدم المعادلات رقم (15.9) لحساب مجاميع المربعات بعد اكمال المتطلبات من جدول البيانات الاتي :

سلالات الاغنام	اصناف الغذاء				المجموع	المتوسطات
	A	B	C	D	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
I	12	13	16	15	56	14
II	16	17	16	17	66	16.5
III	19	18	17	18	72	18
المجموع $Y_{.j}$	47	48	49	50	$Y_{..} = 194$	
$\bar{Y}_{.j}$	15.67	16	16.33	16.67		$\bar{Y}_{..} = 16.167$

$$\sum\sum Y_{ij}^2 = 3182 \quad ; R = 3 ; \; C = 4$$

$$SST = \sum_i^R \sum_j^C Y_{ij}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2 = 3182 - (3)(4)(16.167)^2$$

$$= 3182 - 3136.46 = 45.54$$

$$SSR = C\sum_i^R \bar{Y}_{i.}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2 = 4[14^2 + 16.5^2 + 18^2] - 3136.46$$
$$= 32.54$$

$$SSC = R\sum_j^C \bar{Y}_{.j}^2 - RC\bar{Y}_{..}^2$$
$$= 3[15.67^2 + 16^2 + 16.33^2 + 16.67^2] - 3136.45$$
$$= 1.87$$

$$SSE = SST - (SSR + SSC) = 45.54 - (32.54 + 1.87)$$
$$= 11.13$$

وبالاعتماد على هذه المجاميع يتم بناء جدول تحليل التباين كما في الجدول (4.9)

S.V	SS	df	MS	F_c
SSR	32.54	$v_1 = 2$	$MSR = 32.54/2 = 16.27$	$F_{cR} = \frac{16.27}{1.855} = 8.77$
SSC	1.87	$v_3 = 3$	$MSC = 1.87/3 = 0.623$	$F_{cC} = \frac{0.623}{1.855} = 0.336$
SSE	11.13	$v_2 = 6$	$MSE = \frac{11.13}{6} = 1.855$	---
SST	45.54	$v = 11$	---	---

3-ايجاد القيم الجدولية من جداول توزيع (F) في الملحق 3 وحسب المعطيات وكالاتي:

$$F_{(\alpha;v_1;v_2)} = F_{(0.05,2,6)} = 19.33; \quad F_{(\alpha;v_3;v_2)} = F_{(0.05;3;6)} = 8.94$$

4-القرار الاحصائي: بمقارنة قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة مع قيمتها الجدولية في الحالتين فاننا لانرفض الفرضية الصفرية (H0) بالنسبة لتاثير السلالات وكذلك لتأثير اصناف الغذاء لان : ($F_{cR} = 8.77 < F_{\alpha} =$ 19.33) وكذلك ($F_{cc} = 0.336 < F_{\alpha} = 8.94$).

5-الاستنتاج : من النتائج اعلاه يمكن ان نستنتج بانه لايوجد اختلاف (فروق معنوية) بين تأثير اصناف الغذاء على الوزن وكذلك لايوجد اختلاف (فروق معنوية) بين تأثير سلالات الغنم على الوزن.

تم في المواضيع السابقة مناقشة احد الاساليب التي تستخدم في اختبار الفرضيات الاحصائية حول المتوسط في حالة ان يكون لدينا اكثر من مجتمعين او عينتين وفي المبحث التالي سوف نتطرق الى اختبار الفرضيات الاحصائية حول معلمة اخرى من معالم المجتمع وهي النسبة (P) في حالة ان يكون لدينا عدة مجتمعات او عينات.