المتتاليات وتقاربها

المتتاليات اللانهائية Infinite sequences

يقال لنظام الأعداد المرتب بالشكل الآتي

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

بمتتابعة (sequence) حيث أن:

a_1 يسمى بالحد الأول first term

a_2 = = الثاني second term

a_n = = النوني n-th term

وقد يرمز للمتتابعة اختصاراً بالشكل $\{a_n\}$

أمثلة

1. $\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\}$
2. $\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$
3. $\{c_n\} = \{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots\}$
4. $\{d_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\}$
5. $\{k_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots\}$

المتتاليات اللانهائية Infinite sequences

تعريف: المتتالية اللانهائية من الأعداد هي دالة مجالها هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

أي أن

$$f: Z^+ \longrightarrow G$$

If $G = \mathbb{R}$ (Real number)

فإن

$$f: Z^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

حيث أن

$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}$: هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

أمثلة:

1. $\left\{\left(n, \frac{1}{n}\right) : n \in Z^+\right\}$

هي متتالية.

أو

$$\left\{\left(n, \frac{1}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

المدى لهذه المتتالية هو

$$\left\{f(1)=1, f(2)=\frac{1}{2}, f(3)=\frac{1}{3}, \dots, f(n)=\frac{1}{n}, \dots\right\}$$

2. $\{(n, \frac{1}{2^n}) : n \in Z^+\}$ or $\{(n, \frac{1}{2^n})\} = \{\frac{1}{2^n}\}$

المدى لهذه المتتابعة هو:

$$\{\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$$

افرض أن $\{U_n\}$ ، $\{V_n\}$ متتابعتان وان k عدد حقيقي فان:

1. $\lim_{n\to\infty} kU_n = k \lim_{n\to\infty} U_n$

2. $\lim_{n\to\infty} (U_n \pm V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n \pm \lim_{n\to\infty} V_n$

3. $\lim_{n\to\infty} (U_n * V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n * \lim_{n\to\infty} V_n$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} U_n}{\lim_{n\to\infty} V_n}$, such that $\lim_{n\to\infty} V_n \neq 0$

تعريف: لتكن $\{u_n\}$ متتابعة، فإذا كانت

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ (موجودة)

فإن المتتابعة $\{u_n\}$ متقاربة (Convergent)

2. $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ (غير موجودة)

فإن المتتابعة $\{u_n\}$ متباعدة (divergent).

أمثلة:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \xrightarrow[\text{من}]{\text{تقرب}} 0$, because $\frac{-1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \xrightarrow[\text{من}]{\text{تقرب}} 0$, because $0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$

المتتاليات العددية

مثال: بين فيما إذا كانت المتتاليات الآتية متقاربة أم متباعدة.

1. $\{u_n\} = \frac{5n^2}{7n^2+1}$ ، 2. $\{v_n\} = \frac{n}{2n-1}$

3. $\{x_n\} = \frac{2^n}{\frac{n+1}{2}}$ ، 4. $\{d_n\} = \frac{n^2+1}{n^2-2n+3}$

5. $r_n = (-1)^{n+1}$ ، 6. $J_n = 2(-1)^{n+1}$

الحل

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{7n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2/n^2}{7n^2/n^2 + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{7+\frac{1}{n^2}} =$

$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5}{\lim_{n\to\infty} 7 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{7+0} = \frac{5}{7} =$ العبارة محدودة

∴ المتتالية متقاربة

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2-0} =$

$= \frac{1}{2}$ العبارة محدودة

∴ المتتالية متقاربة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2*2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 1 = \frac{1}{2}$$ النهاية موجودة

∴ المتتابعة متقاربة.

4. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-2n+3} = 1$$ النهاية موجودة

∴ المتتابعة متقاربة

5. $$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ odd} \\ -1 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

∴ النهاية غير موجودة لوجود نهايتان

∴ المتتابعة متباعدة.

$$\lim_{n\to\infty} 2(-1)^{n+1} = \begin{cases} 2 \text{ if } n \text{ odd} \\ -2 \text{ if } n \text{ even} \end{cases}$$

∴ توجد متتابعتان

∴ النهاية غير موجودة

∴ المتتابعة متباعدة (divergent)

مثال: اكتب الحدود الخمسة الأولى من حدود المتتابعات الآتية:

1. $\left\{\frac{n}{2n-1}\right\}$ ، 2. $\left\{\frac{n^2+1}{n^2-2n+3}\right\}$

3. $\left\{\frac{2^n}{2^{n+1}}\right\}$ ، 4. $\left\{\frac{1-n}{n^2}\right\}$

الحل:

1. $\left\{\frac{n}{2n-1}\right\} = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}\right\}$

2. $\left\{\frac{n^2+1}{n^2-2n+3}\right\} = \left\{1, \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{17}{11}, \frac{26}{18}\right\}$

3. $\left\{\frac{2^n}{2^{n+1}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

4. $\left\{\frac{1-n}{n^2}\right\} = \left\{0, \frac{-1}{4}, \frac{-2}{9}, \frac{-3}{16}, \frac{-4}{25}\right\}$