المعادلات التفاضلية / السنة الثالثة / قسم physics

Bernoulli's Equation معادلة برنولي

المعادلة التفاضلية غير الخطية.

الصيغة العامة لها $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

بحيث $n \neq 0, 1$

لكي نحل هذه المعادلة فيجب تحويلها الى معادلة تفاضلية خطية كما في الحالة السابقة (المعادلة التفاضلية الخطية). وكما يأتي

1) نقسم طرفي المعادلة على y^n للحصول على الخطية

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad \text{---} (1)$$

2) نفرض $z = y^{1-n}$ وبعد الاشتقاق نحصل على

$$\frac{dz}{dx} = z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{(1-n)}z'$$

3) بعد التعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$

أي أن

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

والتي هي معادلة تفاضلية خطية في z ونحلها كما في الطريقة السابقة (طريقة الخطية).

امثلة: اوجد الحل العام للمعادلات برنولي التالية:

1) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3x}{y}$

الحل:

$n = -1$

نضرب طرفي المعادلة في y فنحصل على

$$yy' - \frac{2}{x}y^2 = 3x \quad \text{---------(1)}$$

Let $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy' \Rightarrow yy' = \frac{z'}{2}$

نعوض في (1)

$$\frac{z'}{2} - \frac{2}{x}z = 3x \qquad (*2)$$

$$z' - \frac{4}{x}z = 6x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في z

$\therefore P(x) = \frac{-4}{x}$, $Q(x) = 6x$

$$\therefore I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-4\int \frac{1}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-4}} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$\therefore I(x)z = \int I(x)Q(x)dx + c$$

$$\frac{1}{x^4}z = \int \frac{1}{x^4}(6x)dx + c$$

$$= 6\int x^{-3}dx + c$$

$$= 6\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$\frac{1}{x^4}z = \frac{-3}{x^2} + c$$

الطرف الثاني x^4

$$z = -3x^2 + cx^4$$

عوضنا عن z بما يساويها

$$y^2 = -3x^2 + cx^4$$

$$y^2 = x^2(cx^2 - 3)$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{x^2(cx^2-3)} = \pm x\sqrt{cx^2-3}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية.

2) $$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

الحل:

بالمقارنة مع الصيغة العامة لمعادلة برنولي

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

نقسم على y^2 نحصل على

$$y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x \quad ---(1)$$

Let $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y' \Rightarrow y'y^{-2} = -z'$

عوضنا في (1)

$$-z' + \frac{1}{x}z = x$$

$$\therefore z' - \frac{1}{x}z = -x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في z.

$\therefore P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = -x$

$\therefore I(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\therefore Iz = \int IQ\,dx + c$

$\therefore \frac{1}{x}z = -\int \frac{1}{x} x\,dx + c$

$\frac{1}{x}z = -\int dx + c$

$\frac{1}{x}z = -x + c$

$\therefore z = -x^2 + cx$

Lw, Lw L, & ics ics

$y^{-1} = cx - x^2$

$\frac{1}{y} = cx - x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{cx - x^2}$

3) $dy + 2xy\,dx = x e^{-x^2} y^3\,dx$

الحل:

نقسم على dx فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x e^{-x^2} y^3$$

وبالمقارنة مع معادلة برنولي

$$\dot{y} + P(x)y = Q(x)y^n$$

نقسم على y^3

$$\dot{y}\bar{y}^3 + 2x\bar{y}^2 = x e^{-x^2} \quad \text{---} \quad (1)$$

Let $z = \bar{y}^2 \Rightarrow z' = -2\bar{y}^3\dot{y} \Rightarrow \dot{y}\bar{y}^3 = \frac{-z'}{2}$

عوضنا في (1)

$$\frac{-z'}{2} + 2xz = x e^{-x^2} \quad * -2$$

$$z' - 4xz = -2x e^{-x^2}$$ (معادلة خطية)

$\therefore P(x) = -4x, \; Q(x) = -2x e^{-x^2}$

$$\therefore I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-4\int x\,dx} = e^{-2x^2}$$

$$\therefore Iz = \int IQ\,dx + c$$

$$e^{-2x^2} z = \int \left(e^{-2x^2}\right)\left(-2x e^{-x^2}\right) dx + c$$

$$e^{-2x^2} z = \int -2x e^{-3x^2} dx + c$$

$$e^{-2x^2} z = \frac{1}{3} e^{-3x^2} + c \qquad * \frac{1}{e^{2x^2}}$$

$$z = \frac{1}{3} \frac{e^{-3x^2}}{e^{-2x^2}} + \frac{c}{e^{-2x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-3x^2} e^{2x^2} + c e^{2x^2}$$

$$z = \frac{1}{3} e^{-x^2} + c e^{2x^2}$$

$$y^{-2} = \frac{1}{3} e^{-x^2} + c e^{2x^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3} e^{-x^2} + c e^{2x^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{\frac{1}{3} e^{-x^2} + c e^{2x^2}}$$

$$\therefore y = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3} e^{-x^2} + c e^{2x^2}}}$$